

Appunto schematico sugli N-poli

Definizioni

Dicesi N-polo un oggetto topologico (cioè privo di dimensioni fisiche) caratterizzato da una superficie (in senso topologico) chiusa che definisce uno spazio interno e uno spazio esterno.

Sulla superficie sono definiti N punti (detti morsetti o terminali), rispetto ai quali si definiscono due funzioni reali di variabile reale, dette rispettivamente correnti e tensioni dell'N- polo:

- correnti dell'N- polo: $i_k(t)$ con k variabile da 1 a N
- tensioni dell'N- polo: $v_{ij}(t)$ con i e j variabili da 1 a N

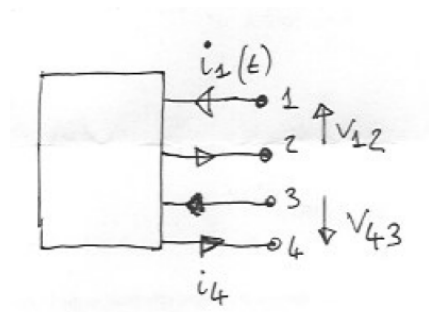
Per la definizione di entrambe le funzioni occorre fissare un riferimento, separatamente per le correnti per le tensioni.

Per quanto riguarda le correnti occorre fissare, per ciascun terminale, un riferimento entrante o uscente dalla superficie topologica che delimita l'N-polo. Rispetto al riferimento assunto la funzione $i_k(t)$ viene detta entrante o uscente nell' N-polo.

Per quanto riguarda le tensioni, la scelta del riferimento si traduce nella scelta di quale fra i due morsetti costituisca il riferimento. In altre parole, per la tensione fra i morsetti i e j occorre definire se si tratta della tensione del morsetto i -mo rispetto al j -mo o viceversa.

La scelta dei riferimenti può essere rappresentata sia in forma grafica sia in forma letterale, in modo del tutto equivalente.

Pensando per fissare le idee ad un 4-polo, lo schema grafico intuitivo per i riferimenti di tensioni e correnti è il seguente



Utilizzando un simbolismo letterale, possiamo ad esempio indicare con il simbolo $i_{k0}(t)$ la corrente del morsetto k -mo con riferimento entrante e con il simbolo $i_{0k}(t)$ una corrente uscente.

Per le tensioni, si può convenzionalmente interpretare il simbolo $v_{ij}(t)$ la tensione del morsetto i -mo rispetto al morsetto j preso come riferimento.

Postulati fondamentali dell'N-polo

Per le tensioni e correnti dell'N-polo valgono i seguenti due postulati.

Il postulato delle correnti può essere formulato con la seguente espressione:

$$\sum_{k=1}^N \pm i_k(t) = 0 \quad (1)$$

dove ogni corrente va assunta con un segno se entrante e con il segno opposto se uscente.

La (1) costituisce un vincolo, il cui rispetto implica che i gradi di libertà nella definizione delle correnti in un N-polo è pari a $N-1$.

Una banale conseguenza della (1) è che, utilizzando il simbolismo letterale, $i_{k0}(t) = i_{0k}(t)$.

Nella realtà fisica, questo postulato equivale all'ipotesi di non accumulo di carica elettrica nella superficie chiusa che costituisce l'involucro dell'apparecchiatura.

Il postulato delle tensioni può invece essere espresso come segue. Scelto, fra gli N morsetti, uno specifico morsetto r da utilizzare come riferimento i rimanenti N-1 morsetti, la tensione fra il morsetto i-mo e il morsetto j-mo può essere espresso come

$$v_{ij}(t) = v_{ir}(t) - v_{jr}(t) \quad (2)$$

dove $v_{ir}(t)$ e $v_{jr}(t)$ sono rispettivamente la tensione del morsetto i-mo rispetto al morsetto preso come riferimento e la tensione del morsetto j-mo rispetto al morsetto preso come riferimento.

Una banale conseguenza della (2) è che, utilizzando il simbolismo letterale, $v_{ij}(t) = -v_{ji}(t)$.

Un'altra conseguenza è che $v_{ii}(t) = 0$.

La (2) mette inoltre in evidenza che anche per la definizione delle tensioni, il numero di gradi libertà è pari a N-1. Infatti, scelto il morsetto di riferimento, possiamo definire tutte le tensioni dei rimanenti morsetti rispetto al riferimento (utilizzando per questo N-1 gradi libertà) e quindi, in virtù della (2), risultano determinate tutte le tensioni fra due generici morsetti.

Un'altra conseguenza della (2) è che, data una sequenza arbitraria di morsetti (ad esempio 3 morsetti a, b, c) si ha:

$$v_{ab}(t) + v_{bc}(t) + v_{ca}(t) = 0$$

Occorre infine osservare che conviene fissare un valore arbitrario per la tensione del morsetto di riferimento, normalmente fissato al valore 0. In questo modo, anche non strettamente necessario, si può dare un valore assoluto alla tensione di un morsetto. Come si vedrà in seguito, questa oss.ne è alla base del cosiddetto metodo del potenziale ai nodi per la soluzione delle reti.

Convenzioni del generatore e dell'utilizzatore

I riferimenti per le tensioni e le correnti vengono scelti in modo indipendente e separato. Per le successive trattazioni, è tuttavia importante considerare nel loro insieme entrambi i riferimenti.

Supponiamo che la tensione dell'i-mo morsetto sia quella rispetto al morsetto di riferimento e cioè $v_{ir}(t)$.

Per quanto riguarda la corrente, ci sono due possibilità e cioè o $i_{k0}(t)$ (corrente entrante) ovvero $i_{0k}(t)$ (corrente uscente).

Diremo a questo punto che sul morsetto i-mo è stata fissata:

- la convenzione dell'utilizzatore se la corrente è entrante
- la convenzione del generatore se la corrente è uscente.

Ovviamente, non è assolutamente necessario fissare la stessa convenzione per tutti i morsetti.

Potenza generata e assorbita

Per le successive trattazioni, è importante considerare, per ogni morsetto, il prodotto della tensione per la corrente.

Introduciamo a questo punto la definizione di potenza generata/utilizzata nell'N-polo.

La potenza generata è definita come

$$p_g(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \pm v_{kN}(t) i_k(t) \quad (4)$$

dove ogni termine della sommatoria va assunto con il segno + se sul morsetto è stata fatta la convenzione del generatore e viceversa.

Nella (3), senza perdita di generalità abbiamo assunto che il morsetto di rif.to per le tensione sia l'N-simo.

Analogamente, la potenza utilizzata è definita come

$$p_u(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \pm v_{kN}(t) i_k(t) \quad (5)$$

dove ogni termine della sommatoria va assunto questa volta con il segno + se sul morsetto è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore e viceversa.

Dal confronto della (4) con la (5) risulta

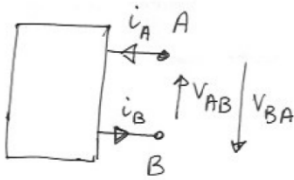
$$p_g(t) = -p_u(t)$$

Bipoli

Evidentemente, un N-polo con $N=1$ (mono-polo) è privo di interesse in virtù dei postulati dell'N-polo

Pertanto il caso più semplice di N-polo è il bipolo, cioè un N-polo dove $N=2$.

Per il bipolo i postulati (indicando con A e B i morsetti) implicano (considerando ad esempio A entrante e B uscente)



$$\begin{aligned} i_A &= i_B \\ v_{AB} &= -v_{BA} \end{aligned}$$

per cui in effetti ci si può limitare a definire, per il bipolo, una sola corrente – (arbitrariamente entrante o uscente). ed una sola tensione.

Si estendono facilmente al bipolo i concetti di convenzioni del generatore/utilizzatore e di potenza generata/utilizzata.

Interpretazione fisica dei postulati dell'N-polo.

Così come la definizione dell'N-polo corrisponde, passando dal modello alla realtà fisica, ad un'apparecchiatura delimitata da un involucro e con un certo numero di morsetti, i postulati dell'N-polo possono essere letti da un punto di vista fisico, cioè come corrispondenti ad una realtà fisica, nel caso specifico quelle dell'elettromagnetismo quasi stazionario.

Per quanto riguarda la realtà fisica corrispondente al postulato delle tensioni, si supponga che si abbia – in tutto lo spazio esterno al dominio che schematizziamo con l'N-polo.

(N.B. nel caso, come si vedrà più avanti, di più N-poli costituenti il sistema, si avrà – ad esclusione di tutti i domini chiusi rappresentati dagli N-poli).

Si può pertanto interpretare la tensione fra due morsetti come differenza di potenziale. Ne viene di conseguenza il postulato sulle tensioni, come indipendenza dell'integrale lineare del campo dal percorso di integrazione.

Per quanto riguarda il postulato delle correnti, la realtà fisica è quella per cui il flusso del vettore $\mathbf{J}$ attraverso la superficie costituente l'involucro dell'apparecchiatura è pari a zero, il che a sua volta corrisponde all'ipotesi di non accumulo di carica elettrica all'interno dell'apparecchiatura.

Si ribadisce il fatto che i postulati non rappresentano la generalità della realtà fisica dell'elettromagnetismo, in particolare i postulati non sono rappresentativi della realtà fisica in cui non può essere trascurata la propagazione elettromagnetica.